UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Cícero Cosme Barbosa Filho

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E ALGUMAS APLICAÇÕES

Campina Grande - PB

2018

Cícero Cosme Barbosa Filho

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Campina Grande - PB

2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B238s Barbosa Filho, Cícero Cosme.
Sistemas de equações lineares e algumas aplicações / Cícero Cosme Barbosa Filho. - João Pessoa, 2018.
48 f. : il.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN_EaD.

1. Sistemas de equações lineares. 2. Matrizes. 3. Determinantes. I. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de. II. Título.

UFPB/BC

Sistemas de Equações Lineares e Algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Professora Orientadora: Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Aprovado em: 12 / 12 / 2018

COMISSÃO EXAMINADORA

Elisandra F. Gloss de Moraes

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes (Orientadora)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley

Dedicatória

A Deus, por me orientar nos momentos difíceis, a minha esposa Daiana que sempre me apoiou em cada etapa dessa minha jornada acadêmica e as minhas filhas Cecília(in memorian),que já se foi, mas que se faz presente todos os dias da minha vida. Sei que está ao lado de Deus torcendo pelo meu sucesso; A Vitória por ser uma menina alegre que contagia nos momentos de tristeza; A Gabriela que chegou a pouco tempo em nossas vidas, mas tornou-se mais um motivo para buscar a prosperidade. Por fim a meus pais que sempre acreditaram na minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

Deus, por me conceder a vida;

À **minha esposa Daiana**, por me incentivar constantemente durante o curso;

À **meus pais**, por sempre me apoiarem nos meus estudos;

Aos **professores e tutores**, que fizeram parte da minha formação;

À **minha orientadora** por ter acreditado na proposta e mostrar o melhor caminho para realizar;

Aos **colegas de curso**, pela troca de informações que me foi de grande ajuda na minha trajetória acadêmica;

Às **pessoas que não acreditaram que eu conseguiria**, pois me serviram de incentivo e força para provar o contrário;

“ A Matemática é o Alfabeto com o qual Deus escreveu o universo...”

Pitágoras

RESUMO

Esse trabalho apresenta um estudo de Sistemas de Equações Lineares, definindo, a princípio, os conceitos básicos de Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares. A seguir apresenta-se algumas sugestões de aplicações interessantes que podem ser utilizadas em sala de aula. Ao final apresentamos nossas conclusões sobre a percepção que tivemos ao longo do trabalho sobre a necessidade do conhecimento mais aprofundado sobre os conceitos matemáticos que o professor deve buscar para que tenha domínio do conteúdo a ser trabalhado em sala de aula e também a importância de buscar atividades que despertem o interesse do aluno e que mostrem situações mais próximas da realidade, onde a Matemática possa ser aplicada.

Palavras chave: Sistemas de Equações Lineares; Ensino; Matrizes, Determinantes; Aplicações.

ABSTRACT

This work presents a study of Systems of Linear Equations, defining, in principle, the basic concepts of Matrices, Determinants and Systems of Linear Equations. After this there are some suggestions for interesting applications that can be used in the classroom. At the end we present our conclusions about the perception that we had throughout the work on the need for a more in-depth knowledge about the mathematical concepts that the teacher should seek in order to have mastery of the content that it will be worked in the classroom and also the importance of pursuing activities that arouse the interest of the student and that show situations closer to reality, where mathematics can be applied.

Keywords: Systems of Linear Equations; Teaching; Matrices, Determinants; Applications.

SUMÁRIO

1 MEMORIAL ACADÊMICO

1.1 Histórico da formação escolar

Comecei a minha vida escolar na cidade de Campina Grande aos 6 anos de idade na escola Estadual Dom Luiz Gonzaga Fernandes, localizada no Bairro das Malvinas, onde cursei um ano da educação básica, o então denominado “Alfabetização”, no ano de 1991. No ano seguinte mudamos de endereço e fomos morar no bairro Ressureição II onde fui matriculado no colégio estadual Professor Raul Córdula. Lá cursei o restante do ensino básico, o ensino fundamental e médio.

No ano de 1999 fiz um teste para estudar no curso profissionalizante de eletricidade na escola SENAI,onde passei cinco anos da minha vida. Neste curso fiz muitos amigos e aprendi muito sobre muitas coisas, entre elas surgiu a afinidade com a área de exatas, onde mais tarde ao conclui o ensino médio em 2002 prestei meu primeiro vestibular para licenciatura em física.

1.2 Histórico da Formação Universitária

Comecei minha vida acadêmica na UEPB no curso de Licenciatura em física, onde apesar da dificuldade inicial que tive na transição do ensino médio para o superior, fui aos poucos tomando gosto pelos cálculos, o que me fez pensar em mudar para o curso de matemática. Mais tarde, no ano de 2007, entrei no curso de Física da UFCG, onde continuei a me aprimorar e obter mais conhecimento. Não cheguei a concluir nenhum dos cursos de Física, contudo eles serviram de base para o que eu realmente desejava que era o curso de Matémática.

Neste mesmo ano comecei a lecionar em escolas estaduais e daí em diante minha vontade de cursar matemática só aumentava, pois, apesar de não lecionar a disciplina, sempre tive vontade de ajudar meus alunos nas dificuldades que tinham na matéria, que os impedia de seguir no aprendizado das outras disciplinas que usam a matemática para provar seus conceitos.

Passei três anos lecionando, quando tive que parar pois precisava no momento me organizar financeiramente, e as aulas não supriam minhas necessidades naquele período, foi quando comecei a trabalhar no comércio e tive que abandonar os cursos.

Com o tempo, após ter me casado, minha esposa me aconselhou a voltar a estudar, foi quando fiz o vestibular UEAD da UFPB em 2013 e graças a Deus e o apoio de minha esposa estou finalmente concluindo meu curso de Matemática.

1.3 Experiência como professor de matemática

Minha experiência como professor de matemática fica restrita às atividades desenvolvidas nas disciplinas de Estágio Supervisionado II e IV, em turma de ensino fundamental e de ensino médio, respectivamente. Durante os estágios foi possível identificar nos alunos que a sua grande maioria apresenta alguma dificuldade nesta disciplina, ou simplesmente não gostam por considerá-la difícil. Diante disso, os conteúdos ministrados em sala de aula foram introduzidos através de modelos e atividades que facilitassem a observação concreta dos mesmos, viabilizando o processo de aprendizagem. No Estágio II fiquei responsável pelos assuntos de “Triângulos semelhantes”, “Teorema de Tales” e “Teorema de Pitágoras”. Os conteúdos vistos foram trabalhados nas perspectivas: conceitual, com a conceituação dos temas; procedimental, com a confecção de modelos aplicáveis a cada assunto, bem como a utilização do conteúdo na resolução de problemas; e atitudinal, com valorização e uso da linguagem matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão, no desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados. Procurei buscar nos alunos o interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise. Procurei ainda destacar o uso do Teorema de Tales com o nosso cotidiano, como por exemplo, na planta de um edifício, na disposição da rede elétrica e relacioná-lo com o Tema Transversal “Trabalho e Consumo”. As atividades propostas no projeto eram fáceis de serem executadas e o material usado na realização das mesmas era simples. Dessa forma não foi necessário modificar o projeto, apenas foram acrescentados alguns exercícios do livro didático adotado pela escola, o que não estava no projeto de intervenção.

Neste projeto os alunos foram avaliados, de forma contínua, quanto ao desempenho nas atividades, aos conteúdos desenvolvidos, as habilidades proposta a ser alcançada, a metodologia utilizada e a aprendizagem dos alunos quanto à compreensão e construção dos conceitos, procedimentos e atitudes, mostrando assim as habilidades e competências que conseguiram desenvolver ao longo da aprendizagem da matemática. Visando assim a capacidade de aprendizagem individual e coletiva, através do desenvolvimento em atividades em grupo e o desempenho de cada um em tal situação de aprendizagem.

Durante esse processo de intervenção as expectativas quanto a proposta e a forma de desenvolvimento foram mudando de acordo com a realidade com que me deparei, isto é, a má formação na aprendizagem matemática que os alunos tiveram nos anos iniciais de estudo. Sendo necessário muitas vezes retomar conceitos primitivos básicos da matemática para poder seguir com a proposta de conteúdo apresentada. Deparei-me, dentre outras dificuldades, com um certo preconceito por parte dos alunos em relação ao estágio, onde recebi o apoio do professor regente para poder seguir com a proposta apresentada e poder entender a necessidade dos alunos e assim poder fazê-los superar as dificuldades que tinham na aprendizagem de matemática.

2 INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2017) o Ensino de Sistemas de Equações Lineares deve acontecer no 8º ano do Ensino Fundamental II (com duas equações e duas incógnitas) e no Ensino Médio (com mais de duas equações). Abaixo listamos as habilidades a serem desenvolvidas em cada etapa do ensino:

> **(8º ano) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (BNCC, 2017)**
> **(Ensino Médio) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais. (BNCC Ensino Médio, 2018)**

O objetivo deste trabalho é mostrar aplicações práticas para Sistemas Lineares em sala de aula. É claro que, para falar dessas aplicações, precisamos primeiro falar do conceito de Sistemas Lineares, o que, por sua vez, nos leva às Matrizes e Determinantes. Não pretendemos com este trabalho aprofundar e esgotar esses conceitos. Buscamos apresentá-los de forma suficientemente detalhada para que os conceitos estejam claros e sirvam como auxílio na compreensão das atividades, além de ajudar o professor na elaboração de novas atividades que abordem os mesmos conceitos. Assim sendo, iniciamos o trabalho com essas definições. No Capítulo 3 apresentamos a definição de Matrizes, tipos de matrizes, operações com matrizes e inversão de Matrizes. A seguir apresentamos a definição de Determinantes e a relação entre estes e Sistemas de Equações Lineares. No Capítulo 4 falaremos sobre as aplicações de Sistemas de Equações Lineares, tais como resolução de cálculo de corrente elétrica em uma associação de resistores, balanceamento de reações químicas e determinação de dietas equilibradas, considerando nutrientes e alimentos específicos. Ao final concluímos sobre a necessidade de um estudo aprofundado por parte do professor e a importância de buscar situações de aprendizagem e problemas que estejam contextualizados e próximos da realidade do aluno.

2.1 Justificativa

Com relação ao ensino da Matemática sempre estamos à procura de formas de tornar o conteúdo mais atraente e significativo para o aluno. Para este trabalho, procuramos, entre conteúdos do Ensino Médio Regular, um conteúdo que, de um modo geral, fosse tratado de forma mais mecânica e distante da realidade do aluno. A partir daí, buscamos formas de tornar esse conteúdo mais interessante para o aluno.

O ensino de Sistemas de Equações Lineares chamou a atenção por ser facilmente levado a um modelo mecânico, com a preocupação de ensinar métodos de cálculo de determinantes. Isso faz com que o aprendizado desse conteúdo torne-se um fim em si mesmo, afastando-o da realidade do aluno.

A partir dessas reflexões, buscamos atividades nas quais os Sistemas de Equações Lineares partam de situações cotidianas ou situações que possam ser abordadas de modo interdisciplinar.

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo geral

- Apresentar atividades que envolvam Sistemas de Equações Lineares e que sejam apresentadas de modo a aproximar-se da realidade do aluno.

2.2.2 Objetivos específicos

- Pesquisar e apresentar as definições formais que envolvem os conteúdos estudados Sistemas de Equações Lineares;
- Pesquisar e apresentar as principais teorias associadas ao conteúdo pesquisado;
- Pesquisar atividades que envolvam o ensino significativo de Sistemas

de Equações Lineares e selecionar e apresentar, dentre as atividades pesquisadas, aquelas que forem mais relevantes.

2.3 Procedimentos Metodológicos

Esse trabalho foi feito a partir de uma pesquisa bilbiográfica qualitativa e descritiva. A partir de orientação foram estudados livros de Álgebra Linear de autores reconhecidos e artigos científicos e dissertações de fontes confiáveis, tais como, sites com coletâneas de artigos científicos como Scielo, sites de Revistas Universitárias, sites de divulgação de Congressos na área de Matemática e Educação Matemática. As definições, teoremas, demonstrações e exemplos foram elaboradas a partir do estudo de textos dos seguintes autores: Anton & Rorres (2001), Callioli, Domingues & Costa (1983), Leite (2008) e Pellegrini (2015).

2.4 Organização

O presente trabalho está dividido em duas partes que, por sua vez, estão subdivididos em tópicos específicos. A primeira parte (Fundamentação Teorica) apresenta um estudo de definições de Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares. A segunda parte (Aplicações) apresenta alguns exemplos de aplicações de Sistemas de Equações Lineares no cotidiano e em atividades interdisciplinares. Ao final apresentamos nossas considerações com relação ao trabalho realizado.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Matrizes

A matriz é uma ferramenta matemática com diversas aplicações (que veremos com mais detalhes no capítulo II), sendo uma das mais importantes, a informática. Uma matriz se caracteriza pela organização de dados em uma tabela e essa é uma particularidade que é bastante explorada na programação gráfica, por exemplo.

Uma matriz é uma coleção de elementos que podem ser números, expressões ou, até mesmo, outras matrizes. Neste trabalho trabalhamos com matrizes de números reais. A representação de uma matriz é feita através da disposição de todos os seus elementos em tabela com *m* linhas (horizontais) e *n* colunas (verticais):

Por convenção, ao nos referirmos a matrizes, usamos a letra *m* para identificar o número de linhas e *n* para indicar o número de colunas $(m, n \in \mathbb{N}^*)$. Assim, uma matriz indicada por M_{mxn} é uma matriz que tem m linhas e n colunas e, nesse caso, dizemos que é uma matriz da ordem ou do tipo mxn. Os elementos de uma matriz são representados usando letras minúsculas seguidas de um índice. Esse índice representa a posição do elemento, indicando a linha e a coluna em que esse elemento se encontra. A linha é sempre contada de cima para baixo e a coluna, da esquerda para a direita. Então, um elemento representados por a_{ij} é um elemento que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Abaixo temos uma representação de uma matriz do tipo mxn:

$$M_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mxn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz com m linhas e n colunas também pode ser representada na forma $A_{mxn} = \left(a_{ij}\right)$, com $\{i, j \in \mathbb{N} / 1 \leq i \leq m \; e \; 1 \leq j \leq n\}$.

3.1.1 Igualdade de matrizes

Duas matrizes de mesmo tipo $A_{mxn} = (a_{ij})$ e $B_{mxn} = (b_{ij})$ são ditas iguais se os elementos correspondentes forem iguais, ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij} \;\; para\ todo\ i,j \in \mathbb{N}\ \ com\ \ 1 \leq i \leq m\ e\ 1 \leq j \leq n.$$

3.1.2 Tipos de matrizes

Algumas matrizes têm características particulares e, por conta disso, têm também nomes particulares:

Matriz quadrada: Uma matriz é dita quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Quando dizemos que uma matriz é de ordem p, estamos dizendo que essa matriz é quadrada e tem p linhas e p colunas.

$$A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Matriz nula: Uma matriz $A_{mxn} = (a_{ij})$ é dita nula quando todos os seus elementos são iguais a zero, ou seja, tem-se $a_{ij} = 0$ para quaisquer números naturais $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Uma matriz nula pode ser de qualquer ordem.

Exemplo de uma matriz nula do tipo 3 x 2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz linha e matriz coluna: Quando uma matriz tem apenas uma linha, é chamada de matriz linha. Os elementos de uma matriz linha serão representados por a_{1j}, onde j representa a coluna na qual o elemento está posicionado.

Analogamente, quando a matriz tem apenas uma coluna, é chamada matriz coluna e seus elementos serão representados por a_{i1}, onde i representa a linha na qual o elemento está posicionado. Nos exemplos abaixo, A é uma matriz linha com m colunas $(m \in \mathbb{N}^*)$ e B é uma matriz coluna com n linhas $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Matriz identidade: Para falar de matriz identidade temos que, primeiro, falar das diagonais de uma matriz. O conceito de matriz identidade refere-se apenas à matrizes quadradas. Em uma matriz quadrada, a diagonal principal é composta por todos os elementos da matriz do tipo a_{ij}, com $i = j$, ou seja, elementos cujas posições indicam o número da linha igual ao número da coluna. Esses elementos, estarão dispostos em diagonal, essa diagonal é chamada de diagonal principal:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Em uma matriz identidade todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0. A matriz identidade é indicada por I_n $(n \in \mathbb{N}^*)$, onde n é a ordem da matriz:

$$I_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Matriz Transposta: Dada uma matriz A do tipo mxn, a matriz Transposta da matriz A, representada por A^t, será uma matriz do tipo nxm, na qual, cada linha da primeira matriz será igual à coluna correspondente da matriz A^t. Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Operações com Matrizes

As operações com matrizes usam muitas propriedades que já conhecemos com números reais, entretanto, há algumas particularidades importantes. A adição, a subtração e a multiplicação não estão definidas para quaisquer pares de matrizes.

Adição de matrizes: Em primeiro lugar é importante dizer que a adição só existe entre matrizes do mesmo tipo, e a matriz resultante também será uma matriz do mesmo tipo das matrizes adicionadas. Dito isso, as operações em si não são muito complexas. Para adicionar duas matrizes A e B do mesmo tipo, devemos adicionar cada elemento da matriz A ao elemento que esteja na posição correspondente na matriz B, ou seja, dadas as matrizes

$$A_{mxn} = (a_{ij}) \quad \text{e} \quad B_{mxn} = (b_{ij}),$$

a matriz obtida pela soma é

$$\text{A + B} = C_{mxn} = (c_{ij}),$$

tal que,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Vejamos um exemplo numérico:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 11 & \sqrt{3} \\ 5 & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi & 4 \\ -8 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+\pi & -2+4 \\ 11+(-8) & \sqrt{3}+2 \\ 5+1 & e+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 3 & \sqrt{3}+2 \\ 6 & e+1 \end{pmatrix}$$

Uma vez que

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{para todo número real } a,$$

se denotarmos 0_{mxn} a matriz nula de ordem mxn, vemos que

$$A + 0 = 0 + A = A$$

para toda matriz A de ordem mxn. Com isso dizemos que a matriz nula é o **elemento neutro** na adição de matrizes.

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 11 & \sqrt{3} \\ 5 & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 11 & \sqrt{3} \\ 5 & e \end{pmatrix}.$$

Produto de matriz por número escalar: Quando multiplicamos uma matriz por um número *b*, o resultado será uma matriz de mesma ordem, na qual cada elemento será igual ao produto de *b* pelo seu correspondente (na mesma posição) na matriz original. Ou seja, dada uma matriz M_{mxn} e um escalar *b,* teremos

$$b.M_{mxn} = b.\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b.a_{11} & \cdots & b.a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b.a_{m1} & \cdots & b.a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se uma matriz A_{mxn} for multiplicada por -1, a matriz resultante -A é dita **matriz oposta** à matriz A. Ao somar uma matriz com sua oposta, o resultado será a matriz nula do mesmo tipo, pois

$$a_{ij} + \left(-a_{ij}\right) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Por exemplo,

$$-1.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtração de matrizes: Dadas duas matrizes de ordem mxn definimos a subtração $A - B$ através da soma da matriz A com a oposta de B. Ou seja,

$$A - B \coloneqq A + (-B).$$

Produto de Matrizes: O produto de matrizes é uma operação que está longe de ser intuitiva. Ao contrário das operações vistas até aqui, é bem mais complexo relacionar o produto de matrizes com o produto de números reais. Começaremos apontando as condições de existência para o produto de duas matrizes. Dadas duas matrizes A_{ixj} e B_{kxl}, o produto entre elas, nessa ordem, só existirá se o número de colunas j da primera matriz (A_{ixj}) for igual ao número de linhas k da segunda matriz (B_{kxl}). Obedecidas essas condições, a matriz produto será do tipo ixl, ou seja, o seu número de linhas será igual ao número de linhas da primeira matriz e seu número de colunas será igual ao número de colunas da segunda matriz.

Uma consequência dessa condição é que o produto de matrizes não tem a propriedade comutativa. É fácil verificar essa afirmação usando um exemplo: Dadas duas matrizes A e B, onde A é do tipo 5 x 3 e B é do tipo 3 x 2. O produto $A.B$ pode ser determinado porque satisfaz a condição de existência, o número de colunas da matriz A (3) é igual ao número de linhas da matriz B. Se, por outro lado, tentarmos determinar o produto $B.A$, essa operação não poderá ser realizada porque não satisfaz a condição de existência do produto de duas matrizes. O número de colunas da matriz B (2) não é igual ao número de linhas da matriz A (5). Mesmo que, em alguns casos, esse produto exista, os resultados não necessariamente serão iguais. Respeitadas as condições de existência, veremos agora como determinar o produto de duas matrizes.

Primeiramente, diremos que cada elemento da matriz produto de duas matrizes A e B, nesta ordem, é resultado da soma dos produtos dos elementos das linhas da Matriz A pelos elementos das colunas da Matriz B.

Mais especificamente, dizemos que o produto $\mathrm{P} = (\mathrm{p}_{ij})$ de uma matriz $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij})$, de ordem mxn, por uma matriz $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_{ij})$, de ordem nxl, será de ordem mxl,, onde cada elemento p_{ij} será determinado por:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}, \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l.$$

Para deixar mais clara essa definição, vamos apresentar um exemplo. Dadas duas matrizes A e B, dos tipos 2x3 e 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} \end{pmatrix}$$

O produto das matrizes $\mathrm{A.B}$ não existe, porque o número de colunas da matriz A (3) é diferente do número de linhas da matriz B (2). Vamos calcular o produto: $B.\mathrm{A}$.

$$B.A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}.a_{11} + b_{12}.a_{21} & b_{11}.a_{12} + b_{12}.a_{22} & b_{11}.a_{13} + b_{12}.a_{23} \\ b_{21}.a_{11} + b_{22}.a_{21} & b_{21}.a_{12} + b_{22}.a_{22} & b_{21}.a_{13} + b_{22}.a_{23} \end{pmatrix}.$$

Vejamos agora um exemplo numérico: Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \ e \ B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O produto de A por B é a matriz quadrada de ordem 2 dada por

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 + 24 - 2 & 7 + 0 + 2 \\ 12 + 48 + 0 & 28 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ 60 & 28 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz produto $A.B$ é do tipo 2x2, conforme esperado, pois possui o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda.

Matrizes Equivalentes: Uma matriz B é equivalente por linha a uma matriz A, se essa matriz B pode ser obtida a partir de uma quantidade finita de operações elementares entre as linhas de A. As operações elementares são:

1. Permutação de duas linhas;
2. Multiplicação de uma linha por um número real não nulo;
3. Substituição de uma linha pela soma da mesma ao produto de outra linha por número real.

Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \text{ é } equivalente\ a \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste processo dividiu-se a segunda linha da matriz A por 2, e somou-se a primeira linha com a terceira linha ambas da matriz A.

Este processo é muito útil quando trabalha-se com soluções de problemas e é necessário escalonar as matrizes.

MATRIZ ESCALONADA:

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, dizemos que A é uma matriz escalonada ou que está na forma escalonada se o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta, linha por linha, até que restem eventualmente apenas linhas nulas.

Exemplo:

As matrizes A, B, C estão na fomra escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Inversão de Matrizes

Matriz Inversa: Dada uma matriz M quadrada de ordem i, se existe uma matriz N quadrada também de ordem i, tal que os produtos $M.N$ e $N.M$ resultam na matriz identidade de ordem i, I_i, então, dizemos que N é a matriz inversa de M, e esta é indicada por M^{-1}.

$$M_i \times N_i = N_i \times M_i = I_i$$

$$M \text{ é inversível} \Leftrightarrow \exists!\, M^{-1} / M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_i.$$

Uma matriz que possui inversa é dita inversível. Uma matriz quadrada não inversível é chamada de matriz singular.

Unicidade da matriz inversa: Considere uma matriz A_n, não nula, e inversível. Seja B a inversa de A, então:

$$A_n.B_n = B_n.A_n = I_n \ .$$

Suponhamos que exista uma matriz C_n, tal que $A_n.C_n = C_n.A_n = I_n$.

Vamos, então, tomar, por exemplo, a equação $C_n.A_n = I_n$ e multiplicá-la por B_n (esse produto é possível porque todas as matrizes são quadradas de mesma ordem):

$$C_n.A_n = I_n$$

$$C_n.\underbrace{A_n.B_n}_{I_n} = \underbrace{I_n.B_n}_{B_n}$$

$$C_n.I_n = B_n$$

$$C_n = B_n.$$

Logo, a matriz inversa B_n de uma matriz A_n, inversível e não nula, é única.

Vejamos um exemplo numérico:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando os produtos teremos:

$$MxN = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e também

$$NxM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que M e N são matrizes inversas.

Gauss-Jordan: Uma forma de determinar a inversa de uma matriz dada é utilizando o método de Gauss-Jordan. Nesse método, consideramos todos os elementos da matriz inversa (desconhecida) como incógnicas. A seguir multiplicamos a matriz dada por essa matriz de incógnitas e igualamos esse produto à matriz identidade de mesmo tipo. Com isso, montaremos um sistema com n equações e n incógnitas, que pode ou não ter solução. Pelo método de Gauss-Jordan, ao invés de resolvermos as equações separadamente, resolvemos o sistema usando o que ele chama de matriz aumentada. Vamos ver um exemplo numérico simples com uma matriz do tipo 2.

Queremos encontrar a matriz inversa da matriz A, dada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos a inversa de A como B, tal que:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Primeiro passo: Queremos determinar B, tal que A.B = I, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando a definição de multiplicação de matrizes, isso é equivalente a resolver os dois sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pelo método Gauss-Jordan, esses dois sistemas não são resolvidos separadamente, ao invés disso, constrói-se uma matriz conhecida como matriz aumentada:

$$\left[\begin{matrix}1 & 2\\3 & 5\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right]$$

Agora, fazendo operações elementares com essa nova matriz, encontraremos uma nova matriz aumentada, na qual, as duas primeiras colunas representam uma matriz identidade do tipo 2:

$$2^{\underline{a}}\ linha\text{: } 3x1^{\underline{a}}\ linha - 2^{\underline{a}}\ linha \Rightarrow \left[\begin{matrix}1 & 2\\3 & 5\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix}1 & 2\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\3 & -1\end{matrix}\right]$$

$$1^{\underline{a}}\ linha\text{: } 1^{\underline{a}}\ linha - 2x2^{\underline{a}}\ linha \Rightarrow \left[\begin{matrix}1 & 2\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\3 & -1\end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-5 & 2\\3 & -1\end{matrix}\right]$$

Agora temos a matriz B, inversa de A: $B = \begin{pmatrix}-5 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$

Verificação:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-5 & 2\\3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5+6 & 2-2\\-15+15 & 6-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5 & 2\\3 & -1\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5+6 & -10 = 10\\3-3 & 6-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz $B = \begin{pmatrix}-5 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}$

3.3 Determinantes

O Determinante de uma matriz é um valor que podemos associar a uma matriz quadrada de números reais. A partir deste número, podemos determinar algumas propriedades particulares desta matriz. Mais adiante veremos que o Determinante está diretamente relacionado às propriedades dos sistemas lineares. Esse número é encontrado a partir de uma série de operações que envolvem todos os elementos dessa dada matriz. Abaixo veremos um método prático para calcular o determinante de uma matriz quadrada qualquer, de ordem menor ou igual a três. Esse método é conhecido como Regra de Sarrus:

Matriz Quadrada de Ordem 1: Dada uma matriz quadrada qualquer de ordem 1, $M = (a_{11})$, seu Determinante será igual a a_{11}, por definição. Indicamos como:

$$det\ M\ = a_{11}$$

Exemplos: $A = (-3)\ \Rightarrow \det A = -3$

$B = (11)\ \Rightarrow \det B = 11$

Matriz Quadrada de Ordem 2: Dada uma matriz quadrada de ordem 2,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

seu determinante será dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\det M = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}.$$

Exemplo: $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

$$\det C = 4.10 - 7.(-1) = 40 + 7 = 47.$$

Matriz Quadrada de Ordem 3: Dada uma matriz quadrada de ordem 3,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

seu determinante será dado por:

$$\begin{aligned} \det M \ = \ & a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} \\ & -a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{21}.a_{12}.a_{33} - a_{32}.a_{23}.a_{11}. \end{aligned}$$

Exemplo: $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$\det D = 1.(-3).(-1) + 4.0.0 + 2.5.10 - 0.(-3).10 - 4.2.(-1) - 1.5.0$ = 111.

Cofatores de uma Matriz: Para encontrar o Determinante de matrizes de ordem 4 ou maior, o cálculo é análogo e, consequentemente, cada vez mais trabalhoso. Uma das opções para o cálculo do determinante de matrizes da ordem $n \geq 2$, é trabalhar com cofatores.

A cada elemento a_{ij} da matriz quadrada

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

definimos o número

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

onde M_{ij} é a matriz quadrada de ordem $n-1$ que se obtém a partir de A_n eliminando-se a linha i e a coluna j. O número b_{ij} é dito o cofator de a_{ij} e a matriz $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_{ij})$ e chamada de matriz dos cofatores de A.

Teorema de Laplace: Dada uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$, o determinante desta matriz pode ser obtido multiplicando-se cada elemento de uma linha ou coluna por seus respectivos cofatores e adicionando os resulados. Ou seja, fixada uma linha i temos

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{ij} .$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Tomemos a primeira linha [1   3   5].

Cofator do elemento a_{11} é $b_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 1.(-16-6) = -22$

Cofator do elemento a_{12} é $b_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = (-1)(-56-9) = 65$

Cofator do elemento a_{13} é $b_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 1.(42-18) = 24.$

Daí, o determinante da matriz A será igual a:

$$\det A = 1.(-22) + 3.65 + 5.24 = -22 + 195 + 120 = 293.$$

Propriedades de Determinantes:

Abaixo apresentamos dez propriedades dos Determinantes (OLIVEIRA, 2014 – p. 21 – 30):

1. Se em uma matriz quadrada A todos os elementos de uma linha ou coluna forem iguais a zero, seu determinante será igual a zero.

   Exemplo:

   A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   Det A = 1.0.6 + 2.0.4 + 0.5.3 – 3.0.4 – 2.0.6 – 1.5.0 = 0

2. Se os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz forem iguais aos seus correspondentes em outra linha (ou coluna) da mesma matriz, o determinante dessa matriz será igual a zero.

   Exemplo:

   B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   Det B = 1.2.6 + 2.3.4 + 1.5.3 – 3.2.4 – 2.1.6 – 1.5.3 = 0

3. Se, em uma matriz quadrada, duas linhas ou duas colunas são proporcionais, o determinante dessa matriz será igual a zero.

   Exemplo:

C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (a 2ª linha é igual a 3 x 1ª linha)

Det C = 1.6.6 + 2.9.4 + 3.5.3 – 3.6.4 – 2.3.6 – 1.5.9

Det C = 36 + 72 + 45 – 72 – 36 – 45 = 0

4. Dada uma matriz A com det A = a. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) forem multiplicados por um número real k, o determinante da matriz resultante R será multiplicado por k (det R = k.a).

   Exemplo:

   Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde det A = a.d – c.b = m

   Seja $R = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ c & d \end{pmatrix}$

   det R = 4a.d – c.4b = 4(a.d – c.b) = 4m

5. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, e dado um número real k, se multiplicarmos A por k, o determinante de A fica multiplicado por k^n, ou seja:

$$\det(k.A_n) = k^n.detA_n$$

   Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 - 6 = -2$$

$$3.\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(3\mathrm{A}) = 36 - 54 = -18 = 9.(-2) = 3^2.(-2)$$

6. O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta A^t.

   Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 - 6 = -2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 - 6 = -2$$

7. Dada uma matriz quadrada A, trocando-se a posição de duas linhas (ou

duas colunas) de A, o determinante da nova matriz será o oposto do determinante da matriz original.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 - 6 = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 6 - 4 = 2$$

8. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

   Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \ a.d.f + b.e.0 + 0.0.c - c.d.0 - b.0.f - b.0.f$$

$$\det A = a.d.f$$

9. Dadas duas matrizes quaradas A e B, de mesma ordem, e A.B a matriz produto, então: det A.B = det A.det B. (Teorema de Binet)

   Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = eh - fg$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A.B) &= (ae + bg).(cf + dh) - (af + bh).(ce + dg) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg \\ &= aedh + bgcf - afdg - bhce \\ &= ad(eh - fg) - bc(eh - fg) \\ &= (ad - bc)(eh - fg) \\ &= \det A \,.\, \det B. \end{aligned}$$

10. Teorema de Jacobi: “O determinante de uma matriz quadrada não se altera quando se adicionam aos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer, os elementos correspondentes de outra fila (linha ou coluna)

paralela previamente mutiplicada por uma constante" (OLIVEIRA, 2014)

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = a(2b + d) - b(2a + c)$$

$$\det B = 2ab + ad - 2ab - bc = ad - bc = \det A$$

Uma consequência importante da nona propriedade para o Determinante de uma Matriz é a utilização do mesmo para verificar se uma Matriz é ou não inversível.

Em primeiro lugar, dada uma matriz quadrada *M* qualquer, caso exista sua inversa M^{-1}, tem-se

$$\det \mathrm{M}. \det M^{-1} = \det(M. M^{-1}) = \det I = 1.$$

Assim sendo, é fácil perceber que, caso o Determinante da Matriz *M* seja igual a zero, sua inversa não existe, porque o produto desse determinante por qualquer outro valor será sempre igual a zero.

3.4 Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

Uma equação linear é toda equação algébrica da forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n = b$$

onde, x_i são variáveis e a_i $(i \in \mathbb{N}/1 \leq i \leq n)$ e *b* são constantes tais que, para ao menos um valor de *i*, a_i é não nulo.

Em uma equação linear, os termos ai $(i \in \mathbb{N}/1 \leq i \leq n)$ são os coeficientes da equação, x_i $(i \in \mathbb{N}/1 \leq i \leq n)$ são as incógnitas e *b* é o termo independente.

Um *Sistema de Equações Lineares* é um conjunto finito de equações lineares nas mesmas variáveis (x_1, x_2, ..., x_n)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em um Sistema de Equações Lineares os valores a_{ij} são os coeficientes.

Solução de um Sistema de Equações Lineares: Uma solução $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ de um sistema de equações deve ser solução de cada uma das equações que compõem esse sistema.

Dado um Sistema de Equações Lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uma de três opções pode ocorrer:

- O sistema tem uma solução;

  Existem $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ que solucionam cada uma das equações do sistema;

  Um sistema deste tipo é chamado de **Sistema Possível e Determinado.**
- O sistema tem mais de uma solução;

  Existem infinitos conjuntos $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ diferentes que solucionam o sistema.

  Um sistema desse tipo é chamado de **Sistema Possível e Indeterminado.**
- O sistema não tem solução.

  Não existe nenhum conjunto $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ que é solução de todas as equações do sistema.

  Um sistema desse tipo é chamado de **Sistema Impossível.**

O Conjunto Solução de um sistema de equações é o conjunto de todas as soluções possíveis para o mesmo.

Se dois Sistemas de Equações possuem o mesmo Conjunto Solução, esses sistemas são considerados Equivalentes.

Um Sistema de Equações Lineares que tem, ao menos uma solução é chamado Compatível. Um Sistema de Equações Lineares que não tem nenhuma solução é chamado de sistema Incompatível.

Um sistema Compatível que tem apenas uma solução é chamado de

Sistema Determinado.

Sistema de Equações Lineares e Matrizes: Todo Sistema de Equações Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito na forma *A.X* = *S,* onde:

A é a Matriz dos Coeficientes: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

X é a Matriz das Incógnitas: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

S é a Matriz de termos independentes: $S = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

Discussão das Soluções de um Sistema de Equações Lineares e Determinante da Matriz dos Coeficientes:

Seja *A* a Matriz dos Coeficientes de um Sistema de Equações Lineares e suponhamos que *A* é uma matriz quadrada, ou seja $m = n$. Com isso estamos dizendo que tem-se o mesmo número de equações e de incógnitas.

Se $det\ A \neq 0$, veremos que o Sistema será Possível e Determinado (terá apenas uma solução).

Exemplo:

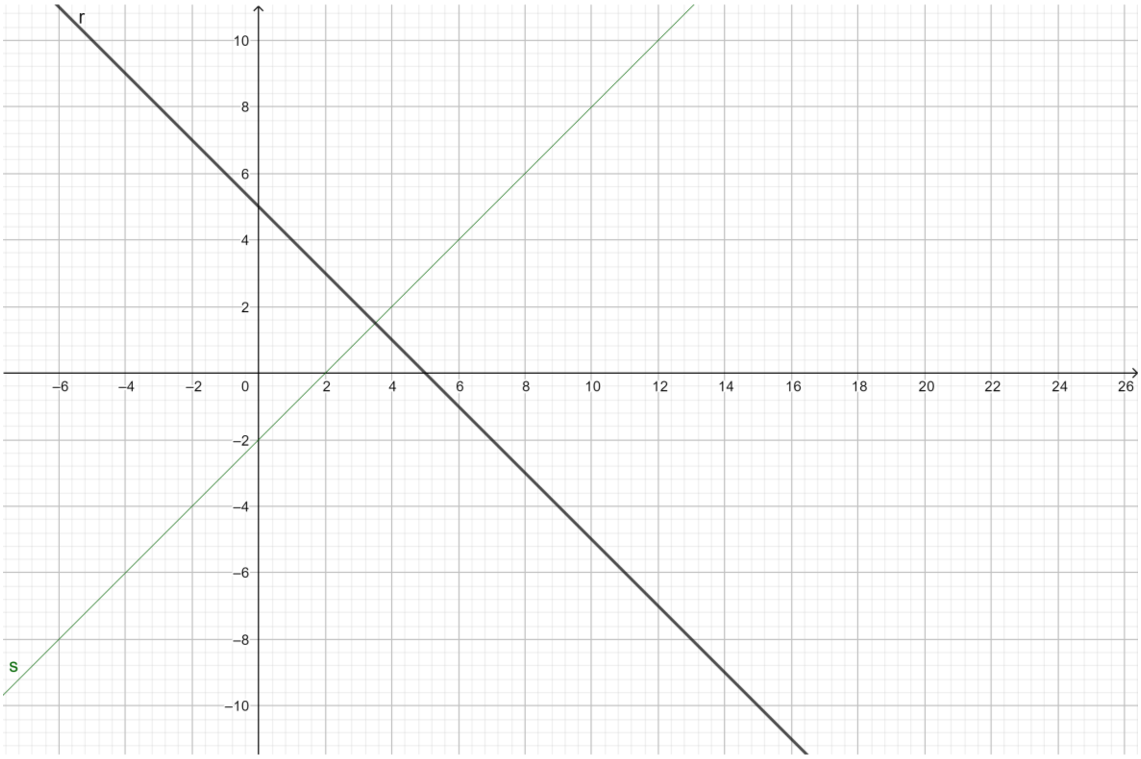
Seja o sistema S, abaixo, representado pelas retas r e s:

$$S = \begin{cases} r: x + y = 5 \\ s: x - y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema vem:

$$Det\ (S) = (1) \times (-1) - (1) \times (1) \rightarrow Det\ (S) = -2, Det\ (S) \neq 0$$

Graficamente temos:



As retas "r" e "s" se tocam uma única vez apresentando uma única solução.

Se $det\ A \neq 0$, a matriz A possui inversa A^{-1}. Uma vez que, na forma matricial, podemos escrever o sistema da forma $AX = S$, usando a matriz inversa obtém-se

$$A^{-1}S = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X,$$

ou seja, $X = A^{-1}S$ é a única solução do sistema.

Exemplo:

Seja o sistema S abaixo:

$$S = \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 11x - 3y = 17 \end{cases}, \quad mulplicando\ a\ primeira\ equação\ por\ 3, vem:$$

$$S = \begin{cases} 12x + 3y = 6 \\ 11x - 3y = 17 \end{cases}, somando\ os\ valores, vem: 23x = 23, x = 1\ e\ y = -2$$

Achando a inversa desta matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = (4 * 3 - 11 * 1) \rightarrow \det A = 12 - 11 \rightarrow \det A = 1,$$

Como $\det \mathrm{A} \neq 0$, existe a matriz inversa de A. Calculando, vem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x + z & 4y + w \\ 11x + 3z & 11y + 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + z = 1 \\ 11x + 3z = 0 \end{cases} e \begin{cases} 4y + w = 0 \\ 11y + 3w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ z = -11 \end{cases} e \begin{cases} y = -1 \\ w = 4 \end{cases}$$

Assim, a matriz inversa é dada por : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$.

$Solução\ do\ sistema$: $x = 1, y = -2\ e\ a\ inversa\ da\ matriz\ A$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$.

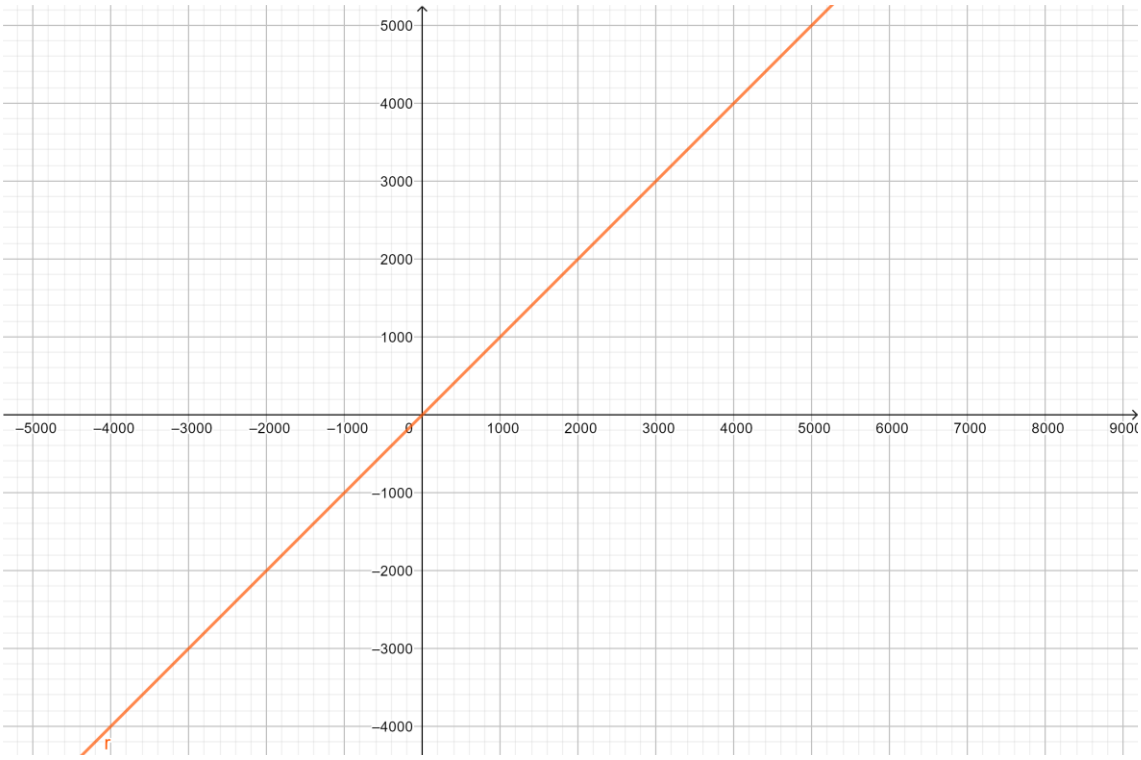
Se $det\ A = 0$, o Sistema poderá ser Possível e Indeterminado ou Impossível: se o determinante é igual a zero, temos duas situações possíveis:

- Uma (ou mais de uma) linha é nula (nesse caso, temos uma quantidade de equações menor que a quantidade de incógnitas, nesse caso, não podemos determinar o valor de todas as incógnitas, mas podemos deixar umas em função de outras. Isso fará com que encontremos infinitas soluções.

Exemplo dado o sistema S abaixo:

$$S = \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \det A = (1) \times (-2) - (-2) \times (1) \rightarrow \det A = 0.$$

As equações do sistema apresentam infintas soluções, na representação grafica, abaixo, as retas se superpoem.



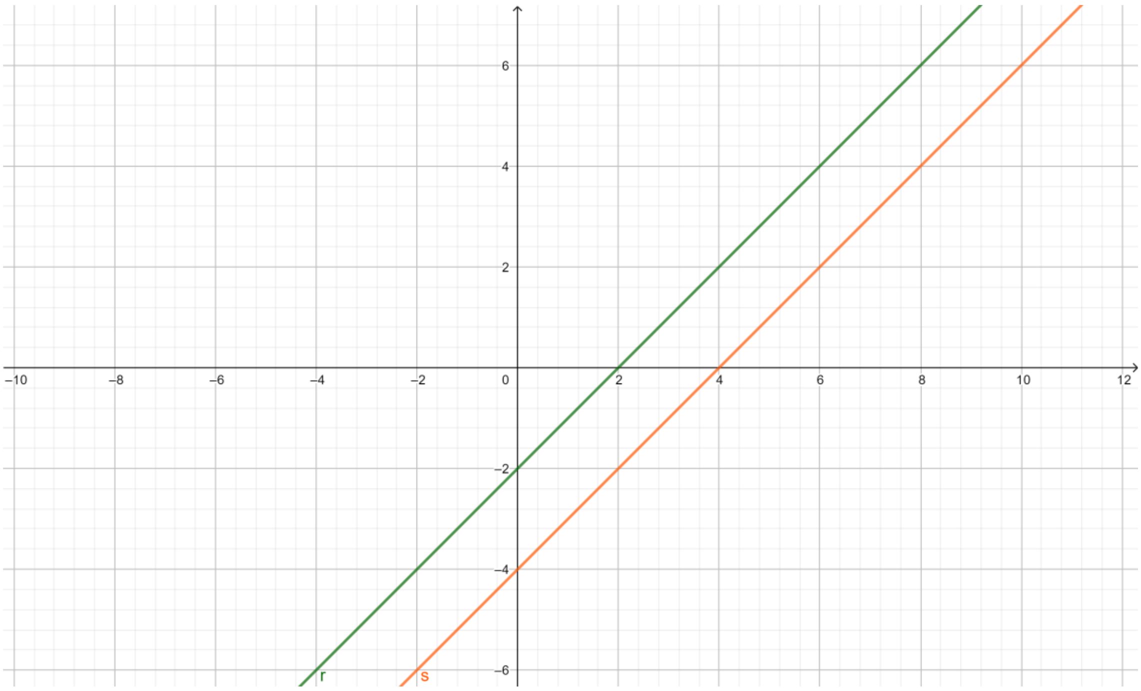
- Uma equação do sistema é do tipo $\alpha = 0$, com $\alpha \neq 0$. É fácil perceber que isso é impossível, portanto, o sistema não tem solução (Sistema Impossível).

Quando a Matriz dos termos independentes é nula, o Sistema admite ao menos uma solução, a chamada solução trivial, quando todos as incógnitas são iguais a zero.

Exemplo dado o sistema S abaixo:

$$S = \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases} \rightarrow \det A = (1) \times (-2) - (-2) \times (1) \rightarrow \det A = 0.$$

As equções do sistema não apresentam soluções, na representação grafica, abaixo, as retas não se tocam.



A Matriz Aumentada de um Sistema pode simplificar a representação de um sistema linear, escrevendo conforme uma única matriz que reúna tanto os coeficientes das variáveis como os termos independentes.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Na forma de matricial aumentada fica:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

O método de eliminação de Gauss-Jordan, deve ser aplicado à matriz aumentada do sistema. Quando a sub-matriz formada pelos coeficientes do sistema for transformada em uma sub-matriz identidade, o vetor-coluna formado pelos termos independentes do sistema será solução.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & S_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & S_m \end{pmatrix}$$

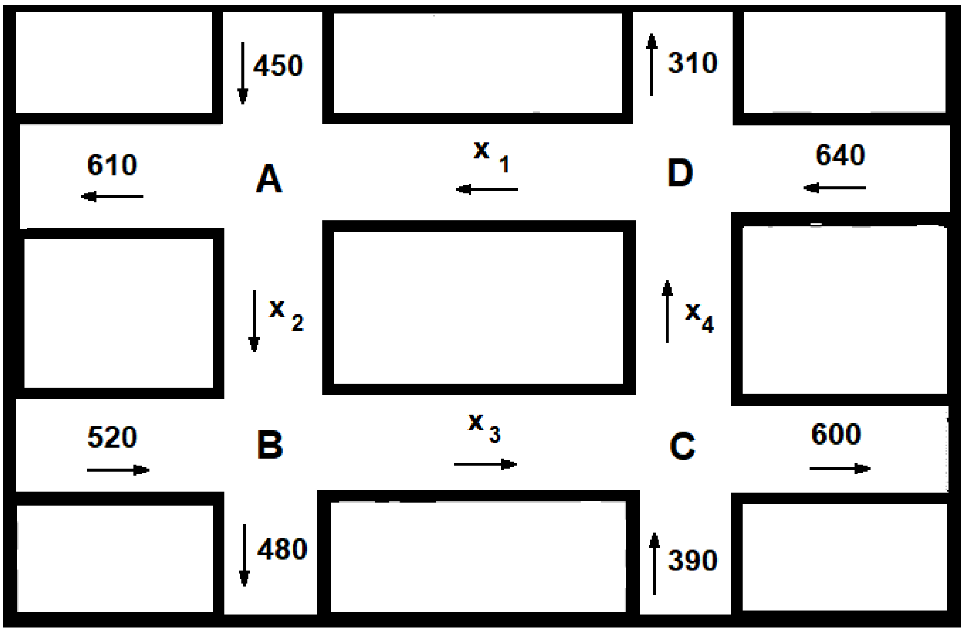
É possível aplicar o método de Gauss-Jordan a sistema cujo número de equações é maior que o número de variáveis,
portanto, $m \, pode \; ser \; igual \; ou \; diferente \; de \; n.$.

4 APLICAÇÕES

4.1 Sistemas Lineares e Tráfego de Veículos

Na monografia *Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares* (p. 38 - 39), Lamin (2000) propõe uma atividade envolvendo o tráfego de veículos. Na figura abaixo são representadas quatro ruas e seus quatro cruzamentos A, B, C e D. Os valores dados representam a quantidade média diária de veículos que transitam em cada trecho das ruas. O objetivo é determinar a quantidade diária média de veículos (x_1, x_2, x_3 e x_4) que trafegam entre os cruzamentos.

Figura 1 - Tráfego de veículos



Fonte 1: Lamin (2000)

Para cada cruzamento, escrevemos uma equação representando a quantidade de carros que entram e saem do mesmo:

$$A:\ x_1 + 450 = x_2 + 610$$
$$B:\ x_2 + 520 = x_3 + 480$$
$$C:\ x_3 + 390 = x_4 + 600$$
$$D:\ x_4 + 640 = x_1 + 310$$

A partir daí, montamos um sistema com quatro equações e quatro incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 160 \\ x_2 - x_3 = -40 \\ x_3 - x_4 = 210 \\ x_4 - x_1 = -330 \end{cases}$$

Matriz aumentada do sistema (em cada linha representamos os coeficientes das quatro incógnitas):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{array}\right]$$

Após o escalonamento, teremos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como a última linha é nula, temos um sistema com apenas três equações e quatro incógnitas, portanto, teremos três variáveis dependendo de uma quarta variável livre, o que indica que há infinitas soluções:

$$\begin{cases} x_1 = 330 + x_4 \\ x_2 = 170 + x_4 \\ x_3 = 210 + x_4 \end{cases}$$

O diagrama de fluxo de tráfego apresentado não possui informações necessárias e sufucientes para determinar o valor de carros que trafegam pelos cruzamentos A, B, C e D, pois a resolução do sistema matricial baseado nas incognitas x_1, x_2, x_3, x_4 possui três equações e quatro variáveis, sendo esta última a variável livre.

Por exemplo: Uma média de 300 carros trafegando por hora entre os cruzamentos C e D, teremos $x_4 = 300$. Utilizando este valor nas três equações encontradas, temos:

$$x_1 = 330 + 300 \rightarrow x_1 = 630$$

$$x_2 = 170 + 300 \rightarrow x_1 = 470$$

$$x_3 = 210 + 300 \rightarrow x_1 = 510$$

4.2 Sistemas Lineares e Reações químicas

Outra área onde a Matemática é bastante usada é a Química. A química também usa a Matemática para criar modelos de experimentos e encontrar fórmulas que ajudem a deduzir resultados em diferentes situações.

Em Química, os Sistemas Lineares são utilizados para encontrar as quantidades de elementos usados no balanceamento de uma reação química.

Veremos agora um exemplo desse tipo de aplicação. O objetivo é determinar a quantidade de poluente produzida pela queima da gasolina em um tanque de combustível:

“A gasolina é formada por compostos chamados hidrocarbonetos e exibe seu principal componente, o C_8H_{18}. A queima completa da gasolina se dá quando esta molécula reage com o oxigênio, resultando em gás carbônico e água:”[1]

[1] Essa atividade faz parte de uma série chamada Matemática na Escola e foi desenvolvida pela Unicamp. Cada atividade tem um vídeo de apresentação, uma versão escrita para o aluno e uma versão escrita para o professor.

$$C_8H_{18} + \ O_2 \longrightarrow CO_2 \ e \ H_2O$$

Podemos observar que a quantidade de moléculas de hidrogênio que entre (18) é maior que a que sai (2). Isso acontece porque a equação não está balanceada. Para realizar esse balanceamento precisamos encontrar um sistema de equações que represente essa relação. O primeiro passo é colocar coeficientes x, y, z e w em cada componente:

$$xC_8H_{18} + \ yO_2 \longrightarrow zCO_2 \ e + \ wH_2O$$

O sistema de equações será obtido para cada elemento separadamente:

Carbono: 8x = z

Hidrogênio: 18x = 2w

Oxigênio: 2y = 2z + w

$$\begin{cases} 8x = z \\ 18x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x - z = 0 \\ 18x - 2w = 0 \\ 2y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes fica:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a última linha é nula, o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero, isso indica que o sistema é Possível e Indeterminado, ou seja, tem infinitas soluções.

Escalonando, teremos:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui temos:

$$\begin{cases} 8x - z = 0 \\ 2y - 2z = w \\ 9z = 8w \end{cases}$$

Vamos determinar as variáveis y, z e w em função de x:

$$\begin{cases} z = 8x \\ 2y = 25x \\ w = 9x \end{cases}$$

Para cada valor de x temos uma solução distinta para o sistema. Vamos pensar em inteiros positivos para facilitar os cálculos. Primeiramente, podemos perceber que no primeiro membro temos um valor par, o que faz com que o segundo membro também tenha um valor par. Daí, procuramos múltiplos de 25 que sejam pares. Se considerarmos o menor valor possível, teremos:

$$2y = 25x = 50$$

o que nos dá x = 2 e y = 25. Agora é fácil encontrar z e w a partir das primeiras equações:

z = 8x	w = 9x
z = 16	w = 18.

Assim, a equação balanceada fica:

$$2C_8H_{18} + 25O_2 \longrightarrow 16CO_2 + 18H_2O$$

Assim, cada duas moléculas de hidrocarboneto libera 16 moléculas de gás carbônico, ou seja, cada molécula de hidrocarboneto libera 8 moléculas de gás carbônico. A partir desse dados o professor de química pode calcular com os alunos a quantidade de moléculas de C_8H_{18} que existe em cada litro de gasolina e determinar a quantidade de gás carbônico equivalente.

4.3 Sistemas Lineares em uma dieta balanceada.

Também podemos utilizar Sistemas de Equações Lineares para modelar dietas alimentares balanceadas. O professor deverá deixar claro que um balanceamento matemático não corresponde, necessariamente, a um balanceamento prático. Há muitos outros fatores que interferem em uma dieta alimentar (vitaminas, restrições alimentares, etc.), portanto, esse cálculo é apenas uma versão mais simples de um sistema real de balanceamento alimentar. A atividade abaixo foi proposta por Rangel (2011) e trata-se de uma tabela de nutrientes de alimentos que formam um café da manhã básico:

"Foi elaborada uma tabela com as quantidades, em gramas, de nutrientes presentes em uma porção de mamão papaia (porção de 100 g), de pão com manteiga (porção de 50 g) e de café com leite (porção de 200 ml)": (RANGEL, 2011)

Tabela 1 - Nutrientes (g) x Alimentos (porção)

Nutrientes	Mamão papaia	Pão com manteiga	Café com leite	Nutrientes diários recomendados
Carboidratos (g)	6	32	4	58
Lipídios (g)	0	6	4	14
Proteína (g)	0	0	6	12

Fonte 2 - Rangel

Chamaremos de x a quantidade de porções de Mamão papaia, y a quantidade de porções de Pão com manteiga e z a quantidade de porções de Café com leite. A partir da tabela encontramos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 6x + 32y + 4z = 58 \\ 0x + 6y + 4z = 14 \\ 0x + 0y + 6z = 12 \end{cases}$$

O sistema é bastante simples e já está escalonado. Encontraremos como solução: x = 3, y = 1 e z = 2, ou seja, o recomendável é que a pessoa coma, por dia, 3 porções de mamão papaia, 1 porção de pão com manteiga e 2 porções de café com leite. Esses valores podem variar de acordo com peso, altura, sexo, restrições alimentares, etc.

O professor pode propor outros tipos de alimentos, considerar outros nutrientes, etc. A atividade pode ser preparada previamente para evitar valores incoerentes (como valores negativos para porções alimentares) ou pode-se propor aos alunos que analisem os resultados e discutam seu significado na prática. Pode-se discutir a validade do método utilizado para a obtenção dos resultados, os dados iniciais, as condições prévias, etc.

Além desses exemplos, os professores podem buscar problemas criativos, que agucem a curiosidade e o interesse do aluno. Problemas clássicos como o das galinhas e porcos[2] podem ser adaptados para motos e automóveis, por exemplo. O professor também pode apresentar os dois problemas (com quantidades diferentes) para ver se os alunos percebem que trata-se de um mesmo problema com pequenas alterações. Caso essa percepção não ocorra expontaneamente, o professor pode pedir aos alunos que analisem os dois problemas e apontem semelhanças e diferenças.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O professor de Matemática deve saber adequar as atividades, de acordo com o nível de ensino. Os exemplos elencados estão voltados para o Ensino Médio, mas pode-se fazer versões simplificadas para o Ensino Fundamental, excluindo algumas variáveis.

Quanto mais aprofundado for o conhecimento do professor a respeito de Sistemas de Equações Lineares, melhor será a percepção dele sobre as dificuldades que uma atividade pode trazer aos alunos, os pontos que poderão ser ressaltados em cada atividade, como adaptar as atividades para diferentes níveis de ensino, como analisar os resultados, etc.

Muitas vezes, o estudo aprofundado de tópicos da Matemática pode ser

[2] Em um quintal há galinhas e porcos num total de (valor dado) animais. Ao todo são (valor dado) pernas. Quantas galinhas e quantos porcos há no quintal? Para resolver esse problema monta-se um sistema com duas equações e duas incógnitas (que representam a quantidade de porcos e galinhas, respectivamente). A primeira equação aponta a soma das duas incógnitas e a segunda, a soma das pernas, considerando que galinhas tem duas pernas e porcos, quatro.

considerado pelo professor como supérfluo porque não condiz com o que será ensinado em sala de aula. É claro que o professor não irá trabalhar com conceitos de Matemática avançada com seus alunos, entretanto, o conhecimento restrito ao que será ensinando, deixa o professor em uma situação extremamente vulnerável. Cabe ao professor investir em sua formação, buscar novas formas de ensinar e aprender, conhecer de modo mais aprofundado as atividades que irá trabalhar em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações.** 8ª Edição. Porto Alegre: Bookman. 2001.

CALLIOLI, C.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações.** 4ª Edição. São Paulo: Atual. 1983.

DORNELLIS, Adalberto Filho. **Montando uma dieta alimentar com Sistemas Lineares.** Revista do Professor de Matemática, n. 59. São Paulo: SBM. 2006

LAMIN, Maria Regina Nunes. **Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares.** Florianópolis. 2000. Disponível em: http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/Maria_Regina_Nunes_Lamin.PDF Acesso em nov. 2018.

LEITE, Isabel C. C. **Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares: Notas de Aula – Álgebra Linear.** Salvador: CEFET. 2008.

LEVORATO, Gabriela Baptistella Peres. **Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares na Engenharia e Economia.** Rio Claro: UEP. 2017.

PELLEGRINI, Jerônimo C. **Álgebra Linear.** São Paulo: IME – USP. 2015.

RANGEL, Waler Sérvulo Araújo. **Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares para os Ensinos Superior e Médio.** Ouro Preto. 2011.

RUFATO, Sônia Aparecida Carreira. **Sistemas Lineares, Aplicações e uma Sequência Didática.** São Carlos. 2013. Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/USP_96bc553b83b3f7d87df53beabe20275a Acesso em nov. 2018.

FUNDAÇÃO Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Gasolina ou Álcool-**

Série Matemática na Escola – Matemática Multimídia. Campinas: UNICAMP.